NOTA	

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA):

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Número de RUT:	Número de MATRICULA:	SECCIÓN:

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**.
- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Las respuestas desordenadas, no serán corregidas.
- Queda totalmente prohibido el uso de calculadoras programables.
- Apagar y guardar sus **celulares**.

Nota$=1+\dfrac{Puntos}{10}$.

Duración= 60 minutos

CORRECCIÓN

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

1) **[20 pts.]**Considere las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentre explicitamente la matriz X que satisface la siguiente ecuación matricial.

$$XB + det(B^{-1})(B^{-1}C)^{-1} = 2C^{-1}B + C^{-1}(AC^t)^t B^2$$

Desarrollo

Primero observar que $det(B) = 1$, por lo que $det(B^{-1}) = \dfrac{1}{det(B)} = 1$(2 pts.). Luego nos queda

$$\begin{aligned} XB + (B^{-1}C)^{-1} &= 2C^{-1}B + C^{-1}(AC^t)^t B^2 \\ XB + C^{-1}B &= 2C^{-1}B + C^{-1}CA^tB^2 \\ XB &= C^{-1}B + A^tB^2 \\ X &= C^{-1} + A^tB \end{aligned}$$

(2 pts. cada paso)

Luego podemos calcular que $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (4 pts.) y que $A^tB = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ (4 pts.) y finamente $X = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ (4 pts.)

2) Considere el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
x + y + 3z - (1+a)w &= 1 \\
-(2+a)y + (2a+2)z &= -2 \\
2x + 2y + (1-2a)z + 3w &= 0 \\
-z + (1+a)w &= 0
\end{aligned}
$$

a) **[20 pts.]** Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que el sistema tenga única solución.

b) **[10 pts.]** Para $a = 0$, muestre que el sistema es inconsistente (no tiene solución).

c) **[10 pts.]** Considerando $a = -2$, **use el método de eliminación Gaussiana o el método de Gauss-Jordan** para resolver el sistema de ecuaciones. En cada paso indique, claramente, la operación fila usada.

SOLUCIÓN.

a) Para que el sistema tenga única solución basta que la matriz de coeficientes

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1-a \\ 0 & -2-a & 2a+2 & 0 \\ 2 & 2 & 1-2a & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1+a \end{pmatrix}
$$

sea invertible (5 pts.). Tenemos que

$$
\begin{aligned}
|A| &\overset{-2F_1+F_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1-a \\ 0 & -2-a & 2a+2 & 0 \\ 0 & 0 & -5-2a & 5+2a \\ 0 & 0 & -1 & 1+a \end{vmatrix} \\
&= (-2-a)\begin{vmatrix} -5-2a & 5+2a \\ -1 & 1+a \end{vmatrix} \qquad \text{(10 pts.)} \\
&= (2+a)(2a^2+5a) \\
&= a(a+2)(2a+5)
\end{aligned}
$$

Luego, el sistema tiene única solución si $a \in \mathbb{R} - \{-2, -5/2, 0\}$ (5 pts.).

b) Para $a = 0$ la matriz ampliada nos queda

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)
\overset{F_{13}(-2)}{\longrightarrow}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\overset{F_{43}(-5)}{\longrightarrow}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{(8 pts.)}
$$

Como nos queda una contradicción en la tercera fila, tenemos que el sistema es incosistente (2 pts.).

c) Para $a = -2$ la matriz ampliada nos queda

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2(-1/2)}{\xrightarrow{F_{13}(-2)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_{23}(1),F_{21}(-3)}{\xrightarrow{F_{24}(1)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_{31}(-1)}{\xrightarrow{F_{34}(1)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{(7 pts.)}$$

Luego, el sistema tiene infinitas soluciones, dadas por

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1-t \\ y & = & t \\ z & = & 1 \\ w & = & -1 \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{(3 pts.)}$$

$\square$